Feuille de TD

Applications linéaires, Décomposition de Dunford algorithmique

Déterminant

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer les mineurs $\Delta_{2,2}$ et $\Delta_{1,3}$.
Calculer $\det(A)$ en effectuant un développement selon la première ligne.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ 1 & 2x & 3x \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(A)$.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$.
- On définit l'endomorphisme $f : P(X) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X.P'(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Calculer $\det(f)$.
- On définit l'endomorphisme $g : P(X) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Calculer $\det(g)$.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ et $A_n = (i+j)_{(i,j)}$.
- Calculer $\det(A_2), \det(A_3)$.
- Montrer que A_n n'est pas inversible pour tout $n \geq 3$.

Exercice 5. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(M)$.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$. Soit $A_n = (\max(i,j))_{(i,j)}$.
- Calculer $\det(A_2)$ et $\det(A_3)$.
- Calculer $\det(A_n)$.

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ et $\tau \in \mathcal{S}_n$.
On définit la matrice $A_\tau \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $a_{i,j} = \delta_{i,\tau(j)}$.
Montrer que $\det(A_\tau) = \varepsilon(\tau)$.

Exercice 8. Soit E un e.v. de dimension n, $n \geq 1$. Soit $s : E \to E$ une symétrie.
- Exprimer $\det(s)$ en fonction de $\dim(Ker(s - Id))$ ou $\dim(Ker(s + Id))$.
- Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on définit l'endomorphisme f par $f(a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n) = a_n + a_{n-1}X + \ldots + a_0X^n$.
Calculer $\det(f)$.
- Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit l'endomorphisme g par $g(A) = {}^t(A)$.
Calculer $\det(g)$.

Exercice 9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$ à coefficients entiers.
- Montrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
- On suppose que A est inversible et que A^{-1} est à coefficients entiers.
Montrer que $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 10. Soit $n \geq 2$. On définit :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $\det(A_3)$ et $\det(A_4)$.
- En déduire $\det(A_n)$.

Exercice 11. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Résoudre l'équation $\det(\lambda I_3 - A) = 0$.
- Si $\det(\lambda I_3 - A) = 0$, que peut-on dire sur $\mathrm{Ker}(\lambda I_3 - A)$?
- En déduire $\mathrm{Spec}(A)$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique (${}^tA = -A$).
• On suppose que n est impair. Montrer que $\det(A) = 0$.
• Si n est pair, est-ce que cela est encore vrai ?

Exercice 13. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Eléments propres d'un endomorphisme

Exercice 14. Soit $n \geq 1$. On définit : $A_n = (1) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Calculer $\det(A_3 - \lambda I_3)$, puis $\det(A_n - \lambda I_n)$.
• En déduire $\mathrm{Spec}\,(A_n)$.
• Pour $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(A_n)$, déterminer $E_\lambda(A_n)$.

Exercice 15.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme 1 $\|A\| = \sum_{i,j} |a_{i,j}|$.
2. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{com}\,(AB) = \mathrm{com}\,(A)\,\mathrm{com}\,(B)$.
3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{com}\,(AB) = \mathrm{com}\,(A)\,\mathrm{com}\,(B)$.

Exercice 16.

1. Montrer que la famille de polynômes
$$\left(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2, (X+3)^2\right)$$
est liée.
2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Montrer que le déterminant suivant est nul :
$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 17. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_{i,j} \in \{-1, 1\}$.
Montrer que $2^{n-1} \mid \det A$.

Exercice 18. Soit α un réel et soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha-5 & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Déterminer χ_A et $\mathrm{Spec}\,(A)$.

Exercice 19. Soient n un entier naturel non nul et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par
$$f(P(X)) = (X^2-1)P''(X) + (2X+1)P'(X).$$

1. Calculer $\chi_f(X)$ et $\mathrm{Spec}\,(f)$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. On se place dans le cas où $n = 2$.
   Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f.

Exercice 20. Soient u, v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que :
   Si $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que la propriété de la première question est encore vraie pour $\lambda = 0$.
3. On prend maintenant $E = \mathbb{R}[X]$.
   On pose $u(P) = P'$ l'endomorphisme de dérivation, et v l'endomorphisme de primitivation ($v(1) = X$ et $v(X^k) = \frac{1}{k+1}X^{k+1}$).
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Conclure.

Exercice 21. 1. Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de J.
(b) En déduire les valeurs propres complexes de la matrice J.
(On notera j le nombre complexe $\mathrm{e}^{i2\pi/3}$.)
(c) Déterminer une base B de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de J.
(d) Pour $f : X \in \mathbb{C}^3 \mapsto J.X \in \mathbb{C}^3$, donner l'écriture de $Mat_B(f)$.

2. Pour tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice
$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que la matrice $A(x, y, z)$ est une combinaison linéaire de I_3, J et J^2.
   (b) En déduire que tout vecteur propre de J est aussi un vecteur propre de $A(x, y, z)$.
   (c) Que valent $\mathrm{Spec}\,(A(x, y, z))$ et $\chi_{A(x,y,z)}$?
   (d) Montrer que toutes toutes les valeurs propres de $A(x, y, y)$ sont réelles.

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer $\mathrm{Spec}\,(A)$, χ_A, et les sous-espaces $E_\lambda(A)$.
Trouver un vecteur $X \in \mathbb{K}^2$ tel que $S_u(X) = \mathbb{K}^2$.

Exercice 23. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$.
- Déterminer $\chi_A(X)$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A, déterminer $E_\lambda(A)$.
- Trouver des vecteurs X tels que $\dim(S_A(X)) = 2$ et 4.

Exercice 24. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$.
- La matrice B possède-t-elle des sous-espaces stables de dimension 3 ?

Exercice 25. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient f, p deux endomorphismes de E, avec p une projection.
Montrer que l'on a $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $Im(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ sont stables par f.

Exercice 26. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non-nulle telle que $Im(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(A)$ sont supplémentaires.
1. Montrer que la matrice A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $A' \in \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})$.
2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on remplace "$Im(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(A)$ sont supplémentaires" par "$rg(A) = rg(A^2)$" ?

Exercice 27. Soient $A \in \mathrm{GL}(n)\mathbb{K}$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que AB est diagonalisable.
Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 28. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables. Si oui, les diagonaliser.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 29. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable.

Exercice 30. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. Trouver une matrice triangulaire supérieure B de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (où a et b sont deux réels que l'on déterminera) et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = B$.

Exercice 31. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.
1. Déterminer le spectre de la matrice A et trouver une base formée de vecteurs propres de A.
2. Soit B une matrice de taille 3×3 qui commute avec A $(AB = BA)$.
Montrer que B est diagonalisable.

3. (Bonus) Déterminer toutes les matrices B qui commutent avec A.

Exercice 32. Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice identité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1. Montrer que l'ensemble F des matrices $M(a, b, c)$, où (a, b, c) parcourt $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.
2. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice J.
3. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice K.
4. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales. (C'est la même matrice P pour J et K.)
5. Montrer qu'il existe une matrice P telle que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P$ est diagonale. (C'est la même matrice P pour tout (a, b, c).)
6. Quel est le spectre de la matrice $M(a, b, c)$?